

Duración: 3 horas.

## Lógica, Conjuntos, Relaciones y Funciones, Inducción

1. Determine la validez del siguiente argumento:

$$(p \rightarrow q) \vee r$$

$$p \vee \neg q$$

$$r \vee q \text{ _____}$$

$$\therefore q$$

2. Demuestre o refute la validez de las siguientes igualdades.

- $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$
- $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

3. Considere dos relaciones de orden parcial  $R_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X \text{ y } x_1 \leq x_2\}$  y  $R_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in Y \text{ y } y_1 \leq y_2\}$ . Enuncie y justifique las condiciones para que  $R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in X \cup Y \text{ y } a \leq b\}$ .

4. Sea  $f$  una función de  $A$  a  $B$  y  $g$  una función de  $B$  a  $C$ . Exprese las propiedades de  $f$  y  $g$  para que  $g \circ f$  sea sobre (suprayectiva).

5. Verifique por inducción que la siguiente ecuación se cumple para todo  $n > 0$ .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

## Lenguajes y Autómatas

1. Encuentre un AFD  $\mathcal{M}$  equivalente al AFN  $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$  definido por la tabla siguiente:

|               | $\Delta$ | $a$            | $b$         | $\varepsilon$  |
|---------------|----------|----------------|-------------|----------------|
| $\rightarrow$ | $q_0$    | $\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$ | $\{q_1\}$      |
|               | $q_1$    | $\{q_2\}$      | $\emptyset$ | $\{q_4\}$      |
| $F$           | $q_2$    | $\{q_2\}$      | $\{q_3\}$   | $\{q_2\}$      |
|               | $q_3$    | $\emptyset$    | $\{q_0\}$   | $\{q_0, q_1\}$ |
|               | $q_4$    | $\emptyset$    | $\{q_0\}$   | $\{q_1\}$      |

2. Determine el lenguaje generado por la gramática lineal izquierda  $\mathcal{G}$  definida por las producciones

$$S \rightarrow aA \mid bA$$

$$A \rightarrow aB \mid aC$$

$$B \rightarrow aB \mid bB \mid aC$$

$$C \rightarrow a \mid b$$

Describa  $L(\mathcal{G})$  como un conjunto de cadenas y mediante una expresión regular asociada.

3. Considere la expresión regular  $r := (a^*a^* + b^*)c + (bc^* + ac^*)(b + a)$ .
- Construya el diagrama de un AFN  $\mathcal{N}$  sin  $\varepsilon$ -transiciones tal que  $L(\mathcal{N}) = L(r)$ .
  - Encuentre una gramática regular  $\mathcal{G}$  tal que  $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{N})$ .
4. Sea  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  el AFD definido mediante la tabla siguiente:

|               | $\delta$ | $a$   | $b$   | $c$   |
|---------------|----------|-------|-------|-------|
| $\rightarrow$ | $q_0$    | $q_2$ | $q_1$ | $q_3$ |
|               | $q_1$    | $q_1$ | $q_1$ | $q_1$ |
| $F$           | $q_2$    | $q_2$ | $q_1$ | $q_1$ |
| $F$           | $q_3$    | $q_1$ | $q_3$ | $q_1$ |

Encuentre una expresión regular  $r$  tal que  $L(r) = L(\mathcal{M})$  y simplifíquela lo más posible. Además, describa verbalmente el lenguaje  $L(\mathcal{M})$ .

## Probabilidad y Estadística

- (10 puntos) Muestra como la probabilidad binomial es idéntica a la probabilidad multinomial cuando el resultado de un experimento aleatorio tiene solo dos posibles resultados. En particular, muestra como ambas formulas son equivalentes.
- (10 puntos) Encuentra la probabilidad de que la suma de las caras de dos dados sea igual a siete. Compara esa probabilidad con aquella en que la suma es igual a 2. Puedes dar el resultado como una fracción.
- (10 puntos) Explica los dos tipos de variables aleatorias y la diferencia entre sus funciones de probabilidad.
- (10 puntos) Explica que propiedad de distribución mide la altura de la función de la probabilidad. Explica a detalle la formula correspondiente.
- (10 puntos) Explica la relación entre la probabilidad binomial y la probabilidad de Poisson.

6. (10 puntos) Una variable aleatoria continua  $X$  puede tomar valores en un rango de  $X_{\min} \leq X \leq X_{\max}$ . La función de distribución  $F_X(X)$  es aquella que presta las siguientes características:

$$\text{Para } x \leq x_{\min}, F(x)=0$$

$$\text{Para } x \geq x_{\max}, F(x)=1$$

$F(x)$  nunca disminuye a medida que  $x$  aumenta

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

Demuestre que la probabilidad que  $X$  caiga entre un intervalo  $a$  y  $b$  (con  $b > a$ ) es  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ . Este es el principio que permite establecer intervalos de confianza.

7. (10 puntos) La Secretaría de Salud del gobierno de México a través de su departamento de investigaciones epidemiológicas realiza una investigación sobre obesidad en el país. La media y desviación estándar de la masa corporal de una muestra aleatoria de 1000 ciudadanos mexicanos de 20 a 35 años de edad es de 82.6kg y 10kg, respectivamente. Si la Secretaría requiere tener un 99 % de exactitud en su estudio, ¿cuál sería el peso promedio de los mexicanos en ese rango de edad?
8. (10 puntos) CISCO ha desarrollado una nueva generación de ruteadores para los cuales la precisión de sus dimensiones es fundamental para la disipación de calor cuando el equipo se encuentra en estrés. Se toma una muestra de las tarjetas madre y se encuentra que sus áreas son 400, 400.1, 400.2, 399.99, 399.1, 400.3, 399.2 y 399.99 centímetros cuadrados. Determine con un 99% de seguridad los límites de tolerancia que contendrán al 95% de las tarjetas, suponiendo una distribución aproximadamente normal.
9. (10 puntos) Una compañía de capital Canadiense en el área de redes desea realizar un estudio sobre los ingenieros en computación, comunicaciones y electrónica en el estado de Jalisco para decidir si se instala en una plataforma industrial voladora en medio del lago de Chapala para fabricar equipo de conmutación de paquetes de capa 2 y 3, hubs y satélites. Para ello realiza una encuesta a aleatoriamente a 1000 egresados de dichas carreras para ver si cursaron alguna materia en el área de redes y protocolos de comunicación. Después de 1 año de investigación, llamadas telefónicas, visitas y una inversión de 100,000 dólares canadienses se halló que 340 cursaron al menos una materia en el dicha área. La compañía desea estimar la proporción real de ingenieros con 99% de seguridad para tomar la decisión de inversión.
10. (10 puntos) En una red de comunicaciones de la empresa "ACME" cuyo CEO es el Pato Donald y CFO Tribilin los usuarios realizan transferencias de archivos de manera aleatoria y cuya duración sigue un patrón gaussiano con una desviación estándar de 2 minutos. De antemano se sabe, según datos históricos, que en promedio duran 15 minutos con una varianza de 9 minutos. El departamento de soporte y operación de la red realiza un estudio y de manera aleatoria monitorea 26 transferencias y resulta que su duración promediaron 12 minutos. ¿Cuál es el promedio de transferencia de archivos en la red del 95 % de los usuarios?

Fotos: Directivos de la empresa ACME



$$\mu^* = \frac{n\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}}$$

<https://unidad.gdl.cinvestav.mx>

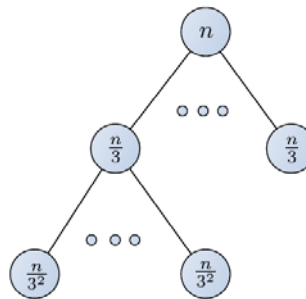
## Estructura de datos

1. (Por favor de la recursión de,

- a. Dividir un input de tamaño  $n$  en 9 subproblemas de tamaño  $\frac{n}{3}$ , sumarlos y cada subproblema tome  $O(n^2)$  en ser completado.

**Respuesta:**

En nuestro caso dado el problema tenemos un árbol de recursión:



- a) Entonces tenemos que  $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n^2)$

2. Por favor

- a. Describa en pseudocódigo un algoritmo recursivo que imprima todas las permutaciones sin repetición de un string.

**Respuesta:**

Tenemos:

**PrintDriver**(String):

- 1) ToPrint = NULL
- 2) Print(ToPrint, String)

**PrintRec**(ToPrint, String):

- 1) if String == NULL:
- 2)     print(ToPrint)
- 3) else:
- 4)     for i in range(len(String)):
- 5)         ToPrint += String[i]
- 6)         TString = String[0:i]+String[i+1:]
- 7)         **PrintRec**(ToPrint, TString)

- b. ¿Qué complejidad tiene este algoritmo?

**Respuesta:**

La complejidad de árbol se consigue asumiendo que en el primer nivel se generan  $n = \text{len}(\text{String})$  después en el siguiente nivel se generan  $n(n-1)$  y de esa manera obtenemos  $O(n!)$ .

3. En este caso

- a. Escriba en pseudocódigo un algoritmo para verificar si un árbol es un árbol de búsqueda binario.

**Respuesta:**

Usando una caminata post-order se puede tener el siguiente código

BSTSearch(Tree):

```

1) if Tree.Left == NULL and Tree.Right == NULL:
2)     return True, Tree.Root.Val
3) else:
4)     LTVAl, LNVal = BBSTSearch(Tree.Left)
5)     RTVal, RNVal = BBSTSearch(Tree.Right)
6)     if (LTVAl and RTVal) == False:
7)         return False, Tree.Root.val
8)     else:
9)         if LTVAl ≤ Tree.Root.val and Tree.Root.val ≤ RTVal
10)            return True, Tree.Root.val
11)    else:
12)        return False, Tree.Root.val

```

b. ¿Qué complejidad tiene este algoritmo?

**Respuesta:**

In the case of every walk we have an overall complexity  $O(n)$  with  $n$  = Number of Nodes in the Tree.

4. Por favor,

a. Escriba en pseudocódigo un algoritmo para revertir una lista ligada.

**Respuesta:**

In this case we have

ReverseList(List):

```

1) RList.head = NULL
2) TNode = NULL
3) while List != NULL:
4)     Node = List.head
5)     List.head = List.head.next
6)     Node.next = RList.head
7)     RList.head = Node

```

b. ¿Qué complejidad tiene este algoritmo?

**Respuesta:**

Complejidad del algoritmo  $O(n)$

5. Dado un array booleano 2D, encuentra el número de islas. Un grupo de 1s conectados forma una isla. Por ejemplo, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Output} = 5$$

a) Por favor de un algoritmo para esto en pseudocódigo (Hint: Connected components)

b) De la complejidad de tú algoritmo.



## Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Programa: Maestría en Ciencias en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica

LGAC: Ciencias de la Computación

Ejemplo de examen de admisión

Año: 2024

6. Se da un array de números enteros sin clasificar; necesitas encontrar el producto máximo formado multiplicando tres números. (No puedes ordenar el array, ten cuidado cuando hay números negativos)
  - a) Del algoritmo en pseudocódigo.
  - b) De su complejidad.
  
7. Dado un árbol binario encuentre usted su altura.
  - a) De un pseudocódigo para este proceso.
  - b) ¿Cuál es su complejidad?
  
8. Dado un array de enteros no ordenados de tamaño  $n$ , rote usted el array por  $d$  elementos con respecto a las manecillas del reloj.
  - a) De un pseudocódigo para este proceso.
  - b) ¿Cuál es su complejidad?